{Θεωρήματα : Bolzano, Ενδιαμέσων Τιμών, Μεγίστου - Ελαχίστου
Μέσης Τιμής, σε βαθμωτά πεδία $n \geq 2$ μεταβλητών.}

• Bolzano : Έστω P_0 και P_1 είναι δυο σημεία ενός τόπου $U \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U, με $f(P_0) \cdot f(P_1) < 0$. Τότε υπάρχει σημείο $P^* \in U$, τ.ω

$$f(P^*) = 0.$$

• Ενδιαμέσων Τιμών (ΘΕΤ) : Έστω P_0, P_1 είναι δυο σημεία ενός τόπου $U \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U με $f(P_0) \neq f(P_1)$. Τότε $\forall$ πραγματικό αριθμό λ μεταξύ των τιμών $f(P_0)$ και $f(P_1)$, υπάρχει $\xi \in U$; τ.ω $f(\xi) = \lambda$

• Μεγίστου - Ελαχίστου : Η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι επίσης συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}$. Δηλαδή η f είναι φραγμένη επί του U και μάλιστα παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της μέσα στο U.
Ακόμη η εικόνα (συμπαγούς) και συνεκτικού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι (κλειστό) διάστημα του $\mathbb{R}$

• Μέσης Τιμής (διαφ. λογισμού) : Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη επί κυρτού τόπου U, τότε για οποιαδήποτε σημεία $P_0, P_1 \in U$, υπάρχει σημείο P^* πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα P_0 και P_1, έτσι ώστε:

$$f(P_1) - f(P_0) = Df(P^*) \cdot (P_1 - P_0)$$

{Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών μέσω Θεωρήματος Bolzano}

Θεωρώ το βαθμωτό πεδίο $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U τόπος, με $g(P) = f(P) - \lambda$, με $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τ.ω χωρίς βλάβη της γενικότητας $f(P_0) < \lambda < f(P_1)$ για $P_0, P_1 \in U$. Τότε ως σύνθεση (αφαίρεση) συνεχών πεδίων f, λ το βαθμωτό πεδίο g είναι συνεχές στον U, τόπο του $\mathbb{R}^n$. Ακόμη ισχύει: $g(P_0) = f(P_0) - \lambda < 0$, καθώς και

$g(P_1) = f(P_1) - \lambda > 0$ λόγω υπόθεσης.

Έτσι μιας και το g πληρεί τις προυποθέσεις του Θ. Bolzano, $\exists\, \xi \in U$, τ.ω $g(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) - \lambda = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \lambda$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

• Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Έστω $\vec{\alpha}$ είναι μια κατεύθυνση στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ένα μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^n$, U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ και $P_0 \in U$. Αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{\alpha}) - f(P_0)}{h}, \text{ και ισούται με } \lambda \in \mathbb{R},$$

τότε λέω ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο P_0 κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}$, συμβολικά:

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) \quad ή \quad \lambda = \nabla_{\vec{\alpha}} f(P_0) \quad ή \quad \lambda = D_{\vec{\alpha}} f(P_0)$$

• Παρατηρήσεις: A) Αν $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) > 0$ (ή $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) < 0$)

τότε οι τιμές $f(P)$ αυξάνουν (ή μειώνονται) όσο κινούμαι από (ή προς) το P_0 κατά την κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

B) Προφανώς $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{\alpha})}(P_0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0)$, θέτοντας στον ορισμό $y = -h$

Γ) Αν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0)$, τότε η f είναι συνεχής πάνω στην ευθεία $E_{\vec{\alpha}}$ που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$. (άμεση συνέπεια ορισμού)

Δ) Ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης, π.χ

$$\frac{\partial(\lambda f \pm \mu g)}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) \pm \mu \frac{\partial g}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial (fg)}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = g(P_0)\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) + f(P_0)\frac{\partial g}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) \text{ , κλπ...}$$

- <u>Μερικές Παράγωγοι</u>

Έστω U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Καλώ μερικές παραγώγους μιας συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$, να είναι όλες οι παράγωγοι της f πάνω στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων της συνήθους βάσης (κανονικής) $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

- Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $f: U \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Καλώ μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x στο P_0, το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{e}_1) - f(P_0)}{h} \qquad \underline{\underline{\vec{e}_1 = (1,0,0)}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = \lambda, \text{ συμβολικά: } \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

Ομοίως, καλώ μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή y στο P_0, το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0+h\vec{e_2})-f(P_0)}{h} \overset{\vec{e_2}=(0,1,0)}{=\!=\!=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$= \mu$, συμβολικά $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$.

Ομοίως τέλος, καλώ μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή z στο P_0, το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0+h\vec{e_3})-f(P_0)}{h} \overset{\vec{e_3}=(0,0,1)}{=\!=\!=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$= \nu$, συμβολικά $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)$

Σχόλιο: Πρακτικά για να υπολογίσω τις μερικές παραγώγους της f, κρατώ κάθε φορά σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές εκτός από μία, και παραγωγίζω την f ως προς αυτή τη μεταβλητή.
Αν όμως η συνάρτηση αλλάζει τύπο εκατέρωθεν του P_0 τότε αναγκαστικά υπολογίζω τις μερικές παραγώγους στο P_0 (αν υπάρχουν), μέσω του ορισμού.

$\longrightarrow$ Ακολουθούν ασκήσεις παραδείγματα

Παράδειγμα 1) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων

$$f(x,y)=x^2+y^2,\quad g(x,y)=e^x\ln(x^2+y^2+1),\quad h(x,y,z)=(xy)^{\sin z},\ (xy>0)$$

Είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\ln(x^2+y^2+1)\right)=\frac{\partial e^x}{\partial x}\ln(x^2+y^2+1)$$

$$+e^x\frac{\partial \ln(x^2+y^2+1)}{\partial x}=e^x\ln(x^2+y^2+1)+\frac{\frac{\partial(x^2+y^2+1)}{\partial x}}{x^2+y^2+1}e^x$$

$$=e^x\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2xe^x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\ln(x^2+y^2+1)\right)=\overset{0}{\cancel{\frac{\partial e^x}{\partial y}}}\ln(x^2+y^2+1)$$

$$+e^x\frac{\partial \ln(x^2+y^2+1)}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(x^2+y^2+1)}{\partial y}}{x^2+y^2+1}e^x=\frac{2ye^x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left((xy)^{\sin z}\right)=\sin z\,(xy)^{\sin z-1}\frac{\partial}{\partial x}(xy)$$
$$=\sin z\cdot x^{\sin z-1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left((xy)^{\sin z}\right)=\sin z\,(xy)^{\sin z-1}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)=\sin z\cdot y^{\sin z-1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left((xy)^{\sin z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\sin z\ln(xy)}\right)=(xy)^{\sin z}\ln(xy)\cos z$$

Παράδειγμα 2) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Είναι: Για $(x,y) \neq (0,0)$, έχω:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x^2-y^2-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Για $(x,y) = (0,0)$, έχω:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{\text{αν υπάρχει}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-0}{h^2+0^2}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = +\infty,$$ άρα στο $(0,0)$ η μ.π της f ως προς x δεν υπάρχει.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \stackrel{\text{αν υπάρχει}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-h}{0^2+h^2}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h^2} = -\infty,$$ άρα στο $(0,0)$ η μ.π της f ως προς y δεν υπάρχει.

- Μερική διαφορισιμότητα

Αν υπάρχουν, δηλαδή είναι πεπερασμένες, όλες οι μερικές παράγωγοι της f σε σημείο P_0, τότε λέω ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο P_0.

- Κλίση της f στο P_0.

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο P_0, τότε ορίζω το διάνυσμα κλίσης της f στο P_0, συμβολικά $\operatorname{grad} f(P_0)$ ή $\nabla f(P_0)$, ως εξής:

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$$

- Διαφορισιμότητα

Από το διαφορικό λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής, $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in U$ με πεπερασμένη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$, ή ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = 0$$, δηλαδή $$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = 0$$

Με έμπνευση την παραπάνω σχέση, δίνεται κατ' αναλογία ο εξής ορισμός:

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $P_0 \in U$. Θα λέω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο P_0 αν υπάρχει ένας πίνακας γραμμή, διάστασης $1 \times n$, τον οποίο καλώ παράγωγο της f στο P_0, συμβολικά $Df(P_0)$, έτσι ώστε:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|f(P) - f(P_0) - Df(P_0) \cdot (P - P_0)|}{|\overrightarrow{PP_0}|} = 0,$$ όπου με την πράξη

$Df(P_0) \cdot (P - P_0)$ εννοώ γινόμενο πινάκων, οπότε το $P - P_0$ θεωρείται ως πίνακας στήλη $n \times 1$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $P_0 \in U$. Εάν f διαφορίσιμη στο P_0, τότε ισχύουν τα εξής:

(α) f διαφορίσιμη προς κάθε κατεύθυνση $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ και
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = Df(P_0) \cdot \vec{\alpha}$$

(β) Ο πίνακας γραμμή $Df(P_0)$ είναι μοναδικός και ισούται με $\nabla f(P_0) \left(= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right)$

(γ) Για κάθε κατεύθυνση $\vec{\alpha}$, ισχύει ότι

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0)\right| \leq \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|$$

Απόδειξη (α) Έστω ότι f διαφορίσιμη στο P_0. Επιλέγω μία τυχαία κατεύθυνση $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ και θέτω $P = P_0 + h\vec{\alpha}$.

Τότε από τον ορισμό έχω:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|f(P_0 + h\vec{\alpha}) - f(P_0) - Df(P_0)\cdot h\vec{\alpha}\right|}{|h||\vec{\alpha}|} = 0$$, κι επειδή

$|\vec{\alpha}| = 1$ (αφού $\vec{\alpha}$ είναι κατεύθυνση) παίρνω

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(P_0 + h\vec{\alpha}) - f(P_0)}{h} - Df(P_0)\cdot\vec{\alpha}\right| = 0$$, ή ισοδύναμα

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) - Df(P_0)\cdot\vec{\alpha}\right| = 0$$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = Df(P_0)\cdot\vec{\alpha}$

(β) Έστω $Df(P_0) = (b_1, \dots, b_n)$. Έχω ότι

$\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = Df(P_0)\cdot\vec{\alpha}$. Αν πάρω $\vec{\alpha} = \vec{e_i}$ $\forall\, i = 1, \dots, n$

τότε η παραπάνω ισότητα γίνεται $\frac{\partial f}{\partial \vec{e_i}} = b_i$, δηλαδή

$Df(P_0) = (b_1, \dots, b_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(P_0)$. Αν υπήρχε

πίνακας $C = (c_1, \dots, c_n) \neq Df(P_0)$, ώστε να ισχύει

$$\lim_{P\to P_0} \frac{|f(P)-f(P_0)-C\cdot(P-P_0)|}{|\overrightarrow{PP_0}|} = 0$$, τότε εργαζόμενος όπως

στο (α) θα έπαιρνα $\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0) = C\cdot\vec{\alpha}$, οπότε για $\vec{\alpha}=\vec{e_i}$

θα είχα $\frac{\partial f}{\partial \vec{e_i}}(P_0) = C_i$, άτοπο γιατί υπέθεσα ότι $C \neq Df(P_0)$

(γ) Έχω:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}}(P_0)\right| = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\cdot\vec{\alpha}\right| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right| \underbrace{\cancel{|\vec{\alpha}|}}_{1} = \left|\operatorname{grad} f(P_0)\right|$$

<u>Θεώρημα</u>: Αν f είναι διαφορίσιμη στο P_0 , τότε η f είναι συνεχής στο P_0.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού f διαφορίσιμη στο P_0 , υπάρχει μια περιοχή του P_0, έστω $\Pi_\delta(P_0)$, όπου η συνάρτηση $\frac{|f(P)-f(P_0)-Df(P_0)\cdot(P-P_0)|}{|\overrightarrow{PP_0}|}$, είναι φραγμένη από κάποιο θετικό αριθμό L.

Δηλαδή; $\frac{|f(P)-f(P_0)-Df(P_0)\cdot(P-P_0)|}{|\overrightarrow{PP_0}|} < L$, $\forall\, P \in \Pi_\delta(P_0)$

Άρα, $|f(P)-f(P_0)-Df(P_0)\cdot(P-P_0)| < L\,|\overrightarrow{PP_0}| \Longrightarrow$

$$-L\,|\overrightarrow{PP_0}| + Df(P_0)\cdot(P-P_0) < f(P)-f(P_0) < L\,|\overrightarrow{PP_0}| + Df(P_0)\cdot(P-P_0)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχω

$|Df(P_0)\cdot(P-P_0)| \leq |Df(P_0)||\overrightarrow{PP_0}|$, οπότε παίρνω

$|f(P)-f(P_0)| < L|\overrightarrow{PP_0}| + |Df(P_0)||\overrightarrow{PP_0}|$, κι επειδή

$|\overrightarrow{PP_0}| \to 0$, όταν $P \to P_0$, παίρνω το ζητούμενο $\square$

Θεώρημα: Αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της f και είναι συνεχείς σε κάποια περιοχή $\Pi_\delta(P_0)$ του σημείου P_0, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο P_0 (συνεχώς διαφορίσιμη).

Δηλαδή, αν το διάνυσμα κλίσης ∇f μιας $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη.